BARAJUL 3 (SUPLIMENTAR) PENTRU JUNIORI, 2002

21 aprilie 2002 - soluţii

Problema 9. Numerele reale a şi b satisfac relaţia $a + b \geq 1$. Să se arate că $8(a^4 + b^4) \geq 1$.

Soluţie:

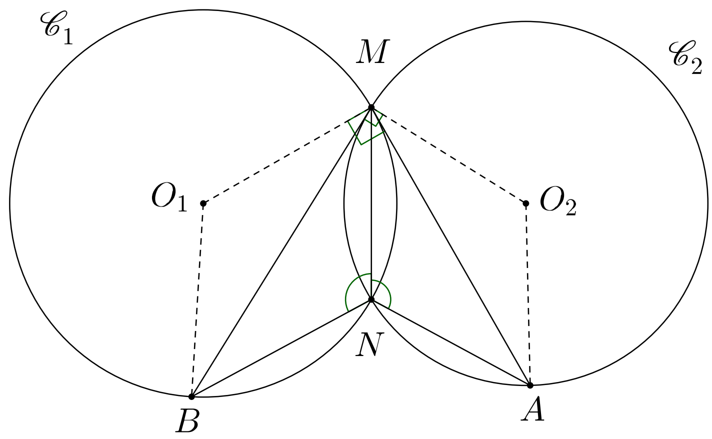
Folosind în mod repetat că $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, avem:

$8(a^4 + b^4) \geq 4(a^2 + b^2)^2 \geq (a + b)^4 = 1$, cu egalitate dacă $a = b = \dfrac{1}{2}$.

Problema 10. Cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ se intersectează în punctele distincte M şi N. Punctele A şi B aparţin respectiv cercurilor $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ astfel încât coardele $[MA]$ şi $[MB]$ sunt tangente în punctul M respectiv la cercurile $\mathscr{C}_2$ şi $\mathscr{C}_1$. Să se demonstreze că unghiurile $\sphericalangle MNA$ şi $\sphericalangle MNB$ sunt congruente.

Soluţie:

Avem $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle BMN$ (ambele subîntind arcul MN din cercul $\mathscr{C}_2$) şi, analog, $\sphericalangle AMN \equiv \sphericalangle MBN$, deci $\Delta\, AMN \sim \Delta\, MBN$, de unde concluzia.



Problema 11. Simultan din acelaşi punct al unui traseu circular şi în aceeaşi direcţie timp de două ore se mişcă uniform două corpuri. Primul corp efectuează o rotaţie completă cu trei minute mai rapid decât al doilea corp şi îl depăşeşte pe acesta în fiecare 9 minute şi 20 secunde. De câte ori primul corp îl va depăşi pe al doilea exact în punctul de start?

Soluţie:

Fie S lungimea în metri a traseului circular. Dacă primul corp parcurge traseul în t minute, cel de-al doilea îl parcurge în $t + 3$ minute. Vitezele celor două corpuri, exprimate în m/min, vor fi S/t, respectiv $S/(t+3)$. Primul corp parcurge în 28/3 minute cu S metri mai mult decât cel de-al doilea. Obţinem ecuaţia:

$$\frac{28}{3} \cdot \frac{S}{t} - \frac{28}{3} \cdot \frac{S}{t+3} = S,$$

adică $t^2 + 3t - 28 = 0$. Singura soluţie pozitivă a acestei ecuaţii este $t = 4$, deci primul corp parcurge traseul în 4 minute, iar cel de-al doilea în 7 minute. Cum 4 şi 7 sunt relativ prime, cele două corpuri se întâlnesc la punctul de start la fiecare 28 de minute. Cum $120 = 28 \cdot 4 + 8$, cele două corpuri se vor întâlni de 4 ori la start.

Problema 12. Fie M o mulţime nevidă de numere reale. Pentru orice $x \in M$ funcţiile $f : M \longrightarrow M$ şi $g : M \longrightarrow M$ satisfac relaţiile $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ şi $f(x) + g(x) = x$. Să se arate că $-x \in M$ şi $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in M$.
Soluţie:
Avem, pentru orice $y \in M$, $f(f(y)) + g(f(y)) = f(y)$, adică $f(f(y)) + y = f(y)$. Scriind această relaţie pentru $f(y)$ în loc de y obţinem că $f(f(f(y))) + f(y) = f(f(y))$. Adunând aceste ultime două relaţii obţinem că $f(f(f(y))) + y = 0$, adică $-y = f(f(f(y))) \in M$.
Din $f(x) + g(x) = x$ şi $f(x) - f(f(x)) = x$, $\forall\, x \in M$ rezultă că $g(x) = -f(f(x))$. Avem atunci că $-f(f(f(x))) = g(f(x)) = f(g(x)) = f(-f(f(x)))$, $\forall\, x \in M$. Scriind această relaţie pentru $x = g(y)$ obţinem $-f(f(y)) = f(-f(y))$, $\forall\, y \in M$. Punând acum $y = g(z)$ obţinem $-f(z) = f(-z)$, $\forall\, z \in M$, ceea ce trebuia demonstrat.

Remarcă: Există mulţimi M şi funcţii $f, g : M \longrightarrow M$ care satisfac enunţul. De exemplu, putem lua $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ şi f definită astfel: $f(-3) = -2$, $f(-2) = 1$, $f(-1) = -3$, $f(1) = 3$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$ şi g definită prin: $g(-3) = -1$, $g(-2) = -3$, $g(-1) = 2$, $g(1) = -2$, $g(2) = 3$, $g(3) = 1$.