BARAJUL 3 (SUPLIMENTAR) PENTRU JUNIORI, 2002

21 aprilie 2002

Problema 9. Numerele reale a şi b satisfac relaţia $a + b \geq 1$. Să se arate că $8(a^4 + b^4) \geq 1$.

Problema 10. Cercurile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ se intersectează în punctele distincte M şi N. Punctele A şi B aparţin respectiv cercurilor $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ astfel încât coardele $[MA]$ şi $[MB]$ sunt tangente în punctul M respectiv la cercurile $\mathscr{C}_2$ şi $\mathscr{C}_1$. Să se demonstreze că unghiurile $\sphericalangle MNA$ şi $\sphericalangle MNB$ sunt congruente.

Problema 11. Simultan din acelaşi punct al unui traseu circular şi în aceeaşi direcţie timp de două ore se mişcă uniform două corpuri. Primul corp efectuează o rotaţie completă cu trei minute mai rapid decât al doilea corp şi îl depăşeşte pe acesta în fiecare 9 minute şi 20 secunde. De câte ori primul corp îl va depăşi pe al doilea exact în punctul de start?

Problema 12. Fie M o mulţime nevidă de numere reale. Pentru orice $x \in M$ funcţiile $f : M \longrightarrow M$ şi $g : M \longrightarrow M$ satisfac relaţiile $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ şi $f(x) + g(x) = x$. Să se arate că $-x \in M$ şi $f(-x) = -f(x)$ oricare ar fi $x \in M$.