BARAJUL 2 PENTRU JUNIORI, 2002
14 aprilie 2002 - soluţii

Problema 5. Pentru orice număr natural $m \geq 1$ şi orice număr real $x \geq 0$ definim expresia

$$E(x,m) = \frac{(1^4+x)(3^4+x)(5^4+x)\cdot \ldots \cdot [(2m-1)^4+x]}{(2^4+x)(4^4+x)(6^4+x)\cdot \ldots \cdot [(2m)^4+x]}.$$

Se ştie că $E\left(\frac{1}{4},\ m\right) = \frac{1}{1013}$. Să se determine valoarea lui m.

Soluţie:

Pentru $k = 1, 2, \ldots, m$ avem $\frac{(2k-1)^4+1/4}{(2k)^4+1/4} = \frac{(4k-2)^4+4}{(4k)^4+4}$. Folosind că $t^4+4 = t^4+4t^2+4-4t^2 = (t^2+2)^2-(2t)^2 = (t^2-2t+2)(t^2+2t+2) = [(t-1)^2+1]\cdot[(t+1)^2+1]$, obţinem $\frac{(2k-1)^4+1/4}{(2k)^4+1/4} = \frac{[(4k-3)^2+1]\cdot[(4k-1)^2+1]}{[(4k-1)^2+1]\cdot[(4k+1)^2+1]} = \frac{(4k-3)^2+1}{(4k+1)^2+1}$. Scriind aceste relaţii pentru $k = 1, 2, \ldots, m$, înmulţindu-se şi făcând simplificările, obţinem $\frac{1}{1013} = E\left(\frac{1}{4},\ m\right) = \frac{2}{(4m+1)^2+1}$. De aici rezultă $(4m+1)^2 = 2025$, de unde $m = 11$.

Problema 6. Să se determine cel mai mic număr întreg strict pozitiv n pentru care există numerele întregi strict pozitive $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ astfel încât fiecare număr natural de la 1001 până la 2021 inclusiv poate fi scris ca sumă de unu sau mai mulţi termeni diferiţi x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Soluţie:

Sunt 1021 de numere care trebuie scrise sub forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1\}$ (nu toţi nuli). Deoarece sunt cel mult $2^n - 1$ numere de această formă (fiecare din cei n coeficienţi a_k poate fi ales în două moduri), trebuie $n \geq 10$.

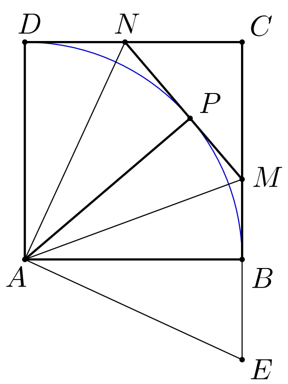
Vom arăta că 10 numere nu sunt suficiente.

Presupunem contrariul. Deoarece 1021 din cele 1023 de sume nenule de forma $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ trebuie să fie cel puţin 1001, deducem că cel mult două dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ sunt mai mici decât 1001. Dacă $x_3, x_4, \ldots, x_{10} \geq 1001$, atunci cele $2^8 - 9 = 247$ sume de forma $a_3x_3 + a_4x_4 + \ldots + a_{10}x_{10}$ care conţin cel puţin doi termeni nenuli, sunt egale cu cel puţin 2002. Dar asta înseamnă că se obţin cel mult $1023 - 247 = 776$ dintre numerele de la 1001 la 2001, adică nu se obţin toate.

Aşadar, am obţinut că sunt necesare cel puţin 11 numere.

Pe de altă parte, numerele $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2^2,\ \ldots,\ x_{11} = 2^{10}$ satisfac condiţiile din problemă: din scrierea unui număr în baza 2 rezultă că orice număr mai mic decât 2^{11} se poate scrie ca suma a unu sau mai multe dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$.

Problema 7. Latura pătratului $ABCD$ are lungimea egală cu 1. Pe laturile (BC) şi (CD) se iau respectiv punctele arbitrare M şi N astfel încât perimetrul triunghiului MCN este egal cu 2.
a) Să se determine măsura unghiului $\sphericalangle MAN$.
b) Dacă punctul P este piciorul perpendicularei duse din punctul A la dreapta MN, să se determine locul geometric al punctelor P.
Soluţie:
Fie $E \in (MB$ astfel încât $B \in (ME)$ şi $BE = DN$.
a) Din egalitatea $MC + CN + MN = 2$ rezultă $ME = MB + BE = MB + DN = 1 - CM + 1 - CN = 2 - (CM + CN) = MN$. Atunci triunghiurile ABE şi ADN sunt congruente, deci $AE = AN$. Triunghiurile AME şi AMN sunt congruente (LLL), deci $\sphericalangle MAN \equiv \sphericalangle MAE$, sau $m(\sphericalangle EAN) = 2m(\sphericalangle MAN)$. Egalitatea $m(\sphericalangle EAB) = m(\sphericalangle NAD)$ conduce la $m(\sphericalangle MAN) = 45°$.
b) Cum $\sphericalangle NMA \equiv \sphericalangle AMB$ rezultă că A este centrul cercului C-exînscris al triunghiului CNM, deci $AP = AB = AD = 1$ este raza acestuia. Prin urmare, punctul P se află pe cercul de centru A şi rază 1, pe arcul cuprins între punctele B şi D. Locul geometric căutat este tocmai acest arc. Într-adevăr, dacă P este pe acest arc, ducem tangenta în P la acest arc şi notăm cu M şi N intersecţiile tangentei cu laturile BC şi CD. Atunci $DN = NP$ şi $PM = MB$ (tangentele duse dintr-un punct la un cerc sunt egale), deci $CN + CM + MN = CN + NP + PM + CM = CN + ND + CM + MB = CD + CB = 2$, prin urmare punctul P aparţine locului geometric.



Problema 8. Să se găsească toate tripletele (a, b, c) de numere întregi strict pozi-

tive dacă se ştie că numerele a^2b, b^2c, c^2a divid numărul $a^3+b^3+c^3$.
Soluţie:
Fie (a,b,c) un triplet cu proprietatea diun enunţ şi d cel mai mare divizor comun al numerelor a,b,c. Atunci şi tripletul $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d},\frac{c}{d}\right)$ are proprietatea din enunţ, deci este suficient să căutăm tripletele care au cel mai mare divizor comun 1.
Dacă un număr prim p divide şi a şi b, atunci îl divide şi pe a^2b, deci şi pe $a^3+b^3+c^3$, prin urmare şi pe c^3, adică pe c. Atunci c.m.m.d.c.$(a,b,c)\geq p$, contradicţie. Aşadar avem de căutat numai tripletele formate din numere relativ prime două câte două. Atunci a^2, b^2, c^2 sunt relativ prime şi fiecare din ele divide numărul $a^3+b^3+c^3$, deci $a^2b^2c^2 \mid a^3+b^3+c^3$. Deducem că $a^2b^2c^2\leq a^3+b^3+c^3$. Fără a restrânge generalitatea putem căuta $a\leq b\leq c$ cu proprietatea că $a^2b^2c^2 \mid a^3+b^3+c^3$. Atunci $3c^3\geq a^3+b^3+c^3\geq a^2b^2c^2$, deci $3c\geq a^2b^2$. Dar c^2 divide $a^3+b^3+c^3$, deci pe a^3+b^3, aşadar $c^2\leq a^3+b^3$. Avem $a^4b^4\leq 9c^2\leq 9a^3+9b^3\leq 18b^3$. Rezultă că $a^4b\leq 18$, deci $a^5\leq 18$, adică $a=1$. Atunci trebuie ca $b^4\leq 9c^2\leq 9+9b^3$. Dacă $b\geq 10$, atunci $b^4\geq 10b^3>9b^3+9$, deci trebuie ca $b\leq 9$.
Pentru $b=1$ rezultă $c=1$, deci $(a,b,c)=(1,1,1)$.
Pentru $b\geq 2$ trebuie ca $b<c$, altfel $(b,c)\neq 1$.
Pentru $b=2$ avem $16\leq 9c^2\leq 81$, deci $c=2$, $c=3$. Obţinem $(a,b,c)=(1,2,3)$.
Pentru $b=3$ rezultă $81\leq 9c^2\leq 28\cdot 9$, adică $c\in\{4,5\}$. Nu convine niciuna din variante.
Pentru $b=4$ avem $16\leq 3c$ şi $c^2\leq 65$, adică $c\in\{5,7\}$ (b,c sunt relativ prime). Nu convine niciuna din variante.
Pentru $b=5$, avem $25\leq 3c$ şi $c^2\leq 126$, deci $c\in\{9,11\}$, dar niciuna din variante nu convine.
Pentru $b=6$, avem $36\leq 3c$ şi $c^2\leq 217$, deci $c=13$, dar această variantă nu convine.
Pentru $b=7$, avem $49\leq 3c$ şi $c^2\leq 344$, deci $c\in\{17,18\}$, dar niciuna din variante nu convine.
Pentru $b=8$ trebuie ca $64\leq 3c$ şi $c^2\leq 513$, ceea ce nu se poate.
Pentru $b=9$ trebuie $81\leq 3c$ şi $c^2\leq 730$, ceea ce nu se poate cu b şi c relativ prime.
Aşadar singurele triplete (a,b,c) de numere care satisfac condiţiile:
c.m.m.d.c$(a,b,c)=1$, $a\leq b\leq c$ şi $a^2b^2c^2 \mid a^3+b^3+c^3$ sunt $(1,1,1)$ şi $(1,2,3)$, deci singurele triplete care satisfac problema iniţiala ar putea fi cele care au una din formele: (n,n,n), $(n,2n,3n)$, $(n,3n,2n)$, $(2n,n,3n)$, $(2n,3n,n)$, $(3n,n,2n)$ şi $(3n,2n,n)$, cu $n\in\mathbb{N}^*$. O simplă verificare arată că toate aceste triplete satisfac enunţul.