BARAJUL 1 PENTRU JUNIORI, 2002
13 aprilie 2002 - soluţii

Problema 1. Pentru orice număr întreg n definim numerele $a = n^5 + 6n^3 + 8n$ şi $b = n^4 + 4n^2 + 3$. Să se demonstreze că numerele a şi b sunt relativ prime sau au cel mai mare divizor comun egal cu 3.

Soluţia 1:
Numerele a şi b pot fi scrise astfel:

$$a = n(n^2 + 2)(n^2 + 4), \quad b = (n^2 + 1)(n^2 + 3) + 3 = (n^2 + 2)^2 - 1.$$

Evident, numerele $n^2 + 2$ şi b sunt relativ prime. Fie $d = (a, b) \geq 1$. Atunci d este relativ prim cu $n^2 + 2$, deci d este un divizor comun al numerelor $n(n^2 + 4)$ şi $n^2(n^2 + 4) + 3$. Rezultă că $d \mid 3$, adică $d \in \{1, 3\}$.
Remarcă: $d = 3$ dacă şi numai dacă $3 \mid n$.

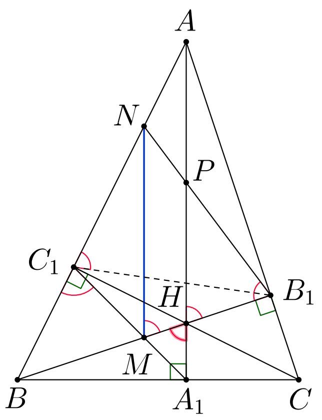
Soluţia 2:
Fie $d = (a, b) \geq 1$. Atunci $d \mid a - nb$, adică $d \mid 2n^3 + 5n$, deci $d \mid 2b - n(2n^3 + 5n)$, adică $d \mid 3n^2 + 6$. Rezultă că d divide $3(2n^3 + 5n) - 2n(3n^2 + 6) = 3n$, deci d divide $(3n^2 + 6) - n \cdot 3n = 6$. Să mai observăm că a şi b au parităţi diferite (a are aceeaşi paritate ca şi n, iar b pe cea contrară), deci d este impar. Rezultă că $d \in \{1, 3\}$.

Problema 2. În plan sunt poziţionate 64 de puncte distincte astfel, încât ele determină exact 2003 drepte diferite. Să se demonstreze că printre cele 64 de puncte există cel puţin 4 puncte coliniare.

Soluţie:
Dacă oricare 3 din cele 64 de puncte ar fi necoliniare, ele ar determina $\dfrac{63 \cdot 64}{2} =$ 2016 drepte diferite. Conform enunţului, există numai 2003 drepte, deci trebuie să existe triplete de puncte coliniare.
Dacă n-ar exista 4 puncte coliniare ci doar triplete, notând cu n numărul acestor triplete, cele 64 de puncte determină 2016 drepte. Dar pentru fiecare din cele n triplete de puncte coliniare (triplete nu neapărat disjuncte), dreapta pe care se află ele a fost numărată de 3 ori (câte o dată pentru fiecare pereche: pentru punctele coliniare A, B, C avem în aparenţă 3 drepte, AB, BC, CA, în realitate însă doar una, adică cu două mai puţine). Aşa că, de fapt, cele 64 de puncte determină $2016 - 2n$ drepte diferite, adică un număr par. Acest lucru contrazice ipoteza, deci trebuie să avem cel puţin patru puncte coliniare.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Punctele A_1, B_1 şi C_1 sunt respectiv proiecţiile vârfurilor A, B şi C pe laturile opuse ale triunghiului, punctul H este ortocentrul triunghiului, iar punctul P este mijlocul segmentului $[AH]$. Dreptele BH şi A_1C_1, PB_1 şi AB sunt concurente respectiv în punctele M şi N.

Să se demonstreze că dreptele MN şi BC sunt perpendiculare.
Soluţia 1:
Patrulaterul BA_1HC_1 este inscriptibil, deci $\sphericalangle AHB_1 \equiv \sphericalangle BHA_1 \equiv \sphericalangle A_1C_1B$.
$[B_1P]$ este mediană în triunghiul dreptunghic AHB_1, deci $PB_1 = PH$.
Rezultă că $\sphericalangle PB_1H \equiv \sphericalangle PHB_1$. Deducem că MC_1NB_1 este inscriptibil. Dar şi AC_1HB_1 este inscriptibil, deci $\sphericalangle NMB_1 \equiv \sphericalangle NC_1B_1 \equiv \sphericalangle AC_1B_1 \equiv \sphericalangle AHB_1$, de unde obţinem că $NM \parallel AH$. Cum $AH \perp BC$, rezultă că şi $NM \perp BC$.



Soluţia 2: (*Stan Fulger*)
BH este diametrul cercului circumscris triunghiului BA_1C_1, P este centrul cercului circumscris triunghiului B_1AC_1, cele două triunghiuri fiind asemenea. În aceste triunghiuri, dreptele BM şi B_1N sunt drepte omoloage, deci $\dfrac{AN}{NC_1} = \dfrac{A_1M}{MC_1}$, adică $MN \parallel AA_1$.

Problema 4. La un turneu de şah participă 9 şahişti. Conform regulamentului, fiecare partiucipant joacă o singură partidă cu fiecare dintre ceilalţi. La un anumit moment al competiţiei s-a constatat că exact doi participanţi au jucat acelaşi număr de partide. Să se demonstreze că în acest caz, fie un singur şahist nu a jucat nicio partidă, fie exact un singur şahist a jucat cu toţi ceilalţi.
Soluţie:
Un şahist poate juca cel mult 8 partide, deci numărul partidelor jucate de fiecare jucător aparţine mulţimii $\{0, 1, 2, \ldots, 8\}$. Evident, nu pot exista simultan un şahist cu 0 partide jucate şi unul cu 8 partide (acesta din urmă ar fi trebuit să joace cu fiecare adversar, în particular şi cu cel care n-a jucat nicio partidă). Pe de altă parte, fiind exact doi participanţi care au jucat acelaşi număr de partide, numerele care reprezintă numărul partidelor jucate de cei 9 jucători sunt fie $1, 2, 3, \ldots, 8$ şi

încă una dintre acestea, fie $0, 1, 2, \ldots, 7$ şi încă una dintre acestea. Să mai observăm că nu putem avea doi jucători cu 8 partide pentru că amândoi ar fi trebuit să joace cu toţi ceilalţi, ori există un jucător care a jucat o singură partidă. Similar, nu putem avea doi jucători care să nu fi jucat nicio partidă pentru că atunci niciunul din ei nu a jucat cu jucătorul care are 7 partide jucate.
În concluzie, fie există un şahist şi numai unul care nu a jucat nicio partidă, fie există un şahist (şi numai unul) care a jucat cu toţi ceilalţi.