BARAJUL 1 PENTRU JUNIORI, 2002

13 aprilie 2002

Problema 1. Pentru orice număr întreg n definim numerele $a = n^5 + 6n^3 + 8n$ şi $b = n^4 + 4n^2 + 3$. Să se demonstreze că numerele a şi b sunt relativ prime sau au cel mai mare divizor comun egal cu 3.

Problema 2. În plan sunt poziţionate 64 de puncte distincte astfel, încât ele determină exact 2003 drepte diferite. Să se demonstreze că printre cele 64 de puncte există cel puţin 4 puncte coliniare.

Problema 3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Punctele A_1, B_1 şi C_1 sunt respectiv proiecţiile vârfurilor A, B şi C pe laturile opuse ale triunghiului, punctul H este ortocentrul triunghiului, iar punctul P este mijlocul segmentului $[AH]$. Dreptele BH şi A_1C_1, PB_1 şi AB sunt concurente respectiv în punctele M şi N. Să se demonstreze că dreptele MN şi BC sunt perpendiculare.

Problema 4. La un turneu de şah participă 9 şahişti. Conform regulamentului, fiecare partiucipant joacă o singură partidă cu fiecare dintre ceilalţi. La un anumit moment al competiţiei s-a constatat că exact doi participanţi au jucat acelaşi număr de partide. Să se demonstreze că în acest caz, fie un singur şahist nu a jucat nicio partidă, fie exact un singur şahist a jucat cu toţi ceilalţi.