BARAJUL 1 PENTRU JUNIORI, 2001

Problema 1. Pe un cerc se consideră o mulţime M formată din n ($n \geq 3$) puncte, dintre care doar unul este colorat în roşu. Stabiliţi care poligoane înscrise în cerc, având vârfurile în mulţimea M, sunt mai multe: cele care conţin punctul roşu sau cele care nu conţin acest punct? Cu cât sunt unele mai multe decât celelalte?

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x] \cdot \{x\} = 2001\,x$, unde $[\,.\,]$ şi $\{\,.\,\}$ reprezintă funcţiile parte întreagă, respectiv parte fracţionară.

Problema 3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AD = BC$ şi $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 120°$. Se ia un punct P în plan astfel încât dreapta CD separă punctele A şi P, iar triunghiul DCP este echilateral. Arătaţi că triunghiul ABP este echilateral. Este adevărată afirmaţia pentru un patrulater neconvex?

Problema 4. Determinaţi cel mai mic număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea: oricare ar fi n numere distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, produsul tuturor diferenţelor de forma $a_i - a_j$, $1 \leq i < j \leq n$ se divide cu 2001.

BARAJUL 2 PENTRU JUNIORI, 2001

Problema 5. Stabiliţi dacă există un număr natural nenul n cu proprietatea că $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$ este raţional.

Problema 6. Fie numerele nenegative $a_1, a_2, \ldots, a_9$, unde $a_1 = a_9 = 0$ şi cel puţin unul dintre numere este nenul. Fie propoziţia
(P): ,,Oricând există un număr a_i, $2 \leq i \leq 8$, astfel încât $a_{i-1} + a_{i+1} < ka_i$".
a) Arătaţi că propoziţia (P) este adevărată pentru $k = 2$.
b) Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei (P) pentru $k = \dfrac{19}{10}$.

Problema 7. Noe are pe corabia sa 4 cuşti mari în care trebuie să aşeze 8 animale. Se ştie că pentru orice animal există cel mult 5 animale cu care el este incompatibil (nu pot locui împreună). Arătaţi că:
a) Noe poate aşeza animalele în cuşti în conformitate cu compatibilitatea lor.
b) Noe poate aşeza animalele câte două în fiecare cuşcă.

Problema 8. Fie numerele naturale a, b, c, astfel încât $c > b > a > 0$. Arătaţi că, printre oricare $2c$ numere naturale consecutive, există trei numere distincte x, y, z astfel încât abc divide xyz.

SOLUŢII

Problema 1. Pe un cerc se consideră o mulţime M formată din n ($n \geq 3$) puncte, dintre care doar unul este colorat în roşu. Stabiliţi care poligoane înscrise în cerc, având vârfurile în mulţimea M, sunt mai multe: cele care conţin punctul roşu sau cele care nu conţin acest punct? Cu cât sunt unele mai multe decât celelalte?

Soluţia 1:
Orice submulţime a lui M cu cel puţin 3 elemente determină (în mod unic) un poligon (convex). Mulţimea M are 2^n submulţimi, dintre care una cu 0 elemente, n cu un element şi $\frac{n(n-1)}{2}$ cu două elemente. Aşadar, există în total $S(n) = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2}$ poligoane cu vârfurile în M. Analog, înlocuind n cu $n-1$, putem afla câte poligoane nu conţin vârful roşu: $S(n-1) = 2^{n-1} - n - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Celelalte $S(n) - S(n-1) = 2^{n-1} - n$ poligoane conţin vârful rou. Sunt cu $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ mai multe poligoane care conţin vârful roşu decât poligoane care nu îl conţin.

Soluţia 2:
Orice submulţime a lui M cu cel puţin 3 elemente determină (în mod unic) un poligon (convex). Fiecărui poligon care nu conţine vârful roşu îi punem în corespondenţă poligonul care are, în plus, şi vârful roşu.[1] Pe lângă poligoanele care se obţin astfel, printre poligoanele care conţin vârful roşu, se află şi triunghiurile. Acestea nu provin din adăugarea vârfului roşu la un ,,poligon cu două vârfuri". Sunt $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ triunghiuri care au un vârf roşu. Aşadar sunt cu $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ mai multe poligoane care conţin vârful roşu decât poligoane care nu îl conţin.

Problema 2. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x] \cdot \{x\} = 2001\,x$, unde $[\,.\,]$ şi $\{\,.\,\}$ reprezintă funcţiile parte întreagă, respectiv parte fracţionară.

Soluţie: Dacă $[x] = n \in \mathbb{Z}$ şi $\{x\} = y \in [0,1)$, avem $ny = 2001(n+y)$, de unde $y(n-2001) = 2001n$. Evident, $n = 2001$ nu convine, şi atunci $y = \frac{2001n}{n-2001} \in [0,1)$. Din $y \geq 0$ rezultă că fie $n \leq 0$, fie $n > 2001$. În primul caz, condiţia $y < 1$

[1] Am definit astfel o funcţie injectivă de la mulţimea poligoanelor făă vârf roşu la mulţimea poigoanelor care au un vârf roşu. Corespondenţa nu este surjectivă: imaginea nu conţine triunghiurile cu un vârf roşu.

revine la $2001n > n - 2001$, adică $n > -\frac{2001}{2000}$, adică $n = -1$ sau $n = 0$. Obţinem $y = \frac{2001}{2002}$, respectiv $y = 0$, adică $x = -1 + \frac{2001}{2002} = -\frac{1}{2002}$, respectiv $x = 0$. În al doilea caz, $n > 2001$, condiţia $y < 1$ revine la $n < -\frac{2001}{2000}$, ceea ce nu se poate.

Problema 3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $AD = BC$ şi $m(\sphericalangle A)+m(\sphericalangle B) = 120°$. Se ia un punct P în plan astfel încât dreapta CD separă punctele A şi P, iar triunghiul DCP este echilateral. Arătaţi că triunghiul ABP este echilateral. Este adevărată afirmaţia pentru un patrulater neconvex?
Soluţie:
Planul este să arătăm că $\Delta PDA \equiv \Delta PCB$ (LUL). Avem, evident, $PD = PC$ şi $DA = CB$. Fie $\{X\} = AD \cap BC$. Cum $m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) = 120°$, deducem că $X \in (AD$ şi $X \in (BC$. În plus, $m(\sphericalangle XDC)+m(\sphericalangle XCD) = 120°$, deci unul din cele două unghiuri are măsura $\geq 60°$, celălalt $\leq 60°$. Cazul $m(\sphericalangle XDC) = m(\sphericalangle XCD) = 60°$ este foarte simplu. În rest, putem presupune că $m(\sphericalangle XDC) > 60°$. Atunci $P \in int(\sphericalangle HDC)$ şi $P \in ext(\sphericalangle XCD)$. Atunci $m(\sphericalangle PDA) = 60° + m(\sphericalangle D)$, iar $m(\sphericalangle PCB) = 360° - 60° - m(\sphericalangle C) = m(\sphericalangle PDA)$ deoarece $m(\sphericalangle C)+m(\sphericalangle D) = 240°$. În concluzie $\Delta PDA \equiv \Delta PCB$ (LUL), deci $PA = PB$. În plus, $m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle BPC) + m(\sphericalangle CPA) = m(\sphericalangle DPA) + m(\sphericalangle CPA) = m(\sphericalangle CPD) = 60°$, deci PAB este echilateral.
Dacă $ABCD$ este concav, concluzia nu mai rămâne adevărată. De exemplu, dacă $ABCD$ este un patrulater ca în enunţ, cu $D \in int(\Delta ABC)$ şi construim triunghiul echilateral $P'CD$ cu P' şi B în semiplane opuse determinate de CD, atunci se arată la fel ca mai sus că triunghiul $P'AB$ este echilateral. Numai că noi nu acest triunghi echilateral $P'CD$ trebuie să-l construim: cum dreapta CD taie segmentul $[AB]$, trebuie să luăm de fapt pe post de P simetricul lui P' fată de CD. Evident, triunghiul PAB nu are cum să fie şi el echilateral.

Problema 4. Determinaţi cel mai mic număr natural $n \geq 2$ cu proprietatea: oricare ar fi n numere distincte $a_1, a_2, \ldots, a_n$, produsul tuturor diferenţelor de forma $a_i - a_j$, $1 \leq i < j \leq n$ se divide cu 2001.
Soluţie:
Descompunerea în factori a lui 2001 este $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. Dacă luăm doar 29 sau mai puţine numere (de exemplu cele de la 1 la 29), niciuna din diferenţe nu va fi divizibilă cu 29, deci produsul nu e divizibil cu 2001. Dacă însă luăm 30 de numere, printre ele vor exista două care dau acelaşi rest la împărţirea cu 3, două (aceleaşi sau altele) care dau acelaşi rest la împărţirea cu 23 şi două cu acelaşi rest la împărţirea cu 29. Prin urmare, oricum am lua 30 de numere, vom avea câte o diferenţă divizibilă cu 3, cu 23 şi cu 29, deci cu 2001.

BARAJUL 2 PENTRU JUNIORI, 2001

Problema 5. Stabiliţi dacă există un număr natural nenul n cu proprietatea că $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ este raţional.

Soluţie:

Nu există. Se ştie că $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$ cu $a,b\in\mathbb{N}$ implică a,b pătrate perfecte. Ori nu există pătrate perfecte la distanţă 2.

Problema 6. Fie numerele nenegative $a_1, a_2, \ldots, a_9$, unde $a_1=a_9=0$ şi cel puţin unul dintre numere este nenul. Fie propoziţia

(P): ,,Oricând există un număr a_i, $2\le i\le 8$, astfel încât $a_{i-1}+a_{i+1}<ka_i$".

a) Arătaţi că propoziţia (P) este adevărată pentru $k=2$.

b) Determinaţi valoarea de adevăr a propoziţiei (P) pentru $k=\dfrac{19}{10}$.

Soluţie:

a) Presupunând propoziţia falsă pentru $k=2$ rezultă că $a_{i-1}+a_{i+1}\ge 2a_i$, $\forall\, 2\le k\le 8$, adică $a_{i-1}-a_i\ge a_i-a_{i+1}$, $\forall\, 2\le k\le 8$. Atunci $0\ge -a_2=a_1-a_2\le a_2-a_3\ge\ldots\ge a_8-a_9=a_8\ge 0$, deci toate numerele sunt egale cu 0, contradicţie.

b) Propoziţia este tot adevărată.

Presupunând-o falsă, am avea relaţiile $a_{i-1}+a_{i+1}\ge ka_i$, $i=\overline{2,8}$. Înmulţindu-le convenabil, obţinem relaţiile:

$$a_7\ge ka_8, \qquad (1)$$

$$ka_6+ka_8\ge k^2a_7, \qquad (2)$$

$$(k^2-1)a_5+(k^2-1)a_7\ge(k^3-k)a_6, \qquad (3)$$

$$(k^3-2k)a_4+(k^3-2k)a_6\ge(k^4-2k^2)a_5, \qquad (4)$$

$$(k^4-3k^2+1)a_3+(k^4-3k^2+1)a_5\ge(k^5-3k^3+k)a_4, \qquad (5)$$

$$(k^5-4k^3+3k)a_2+(k^5-4k^3+3k)a_4\ge(k^6-4k^4+3k^2)a_3, \qquad (6)$$

$$(k^6-5k^4+6k^2-1)a_3\ge(k^7-5k^5+6k^3-k)a_2. \qquad (7)$$

Adunând aceste relaţii obţinem $(k^5-4k^3+3k)a_2\ge(k^7-5k^5+6k^3-k)a_2$, adică $(k^7-6k^5+10k^3-4k)a_2\le 0$. Dacă $a_2\ne 0$, obţinem $k(k^6-6k^4+10k^2-4)\le 0$, adică $k(k^2-2)(k^4-4k^2+2)\le 0$. Dacă $k\ge\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 1,847$, atunci această condiţie nu este respectată.

Dacă $a_2=0$, $a_3\ne 0$, adunând primele şase din relaţiile de mai sus obţinem $a_3(k^6-5k^4+6k^2-1)\le 0$. Cea mai mare dintre soluţiile ecuaţiei $x^6-5x^4+6x^2-1=0$ este cca 1,802, deci pentru $k\ge 1,802$ se obţine contradicţie.

Dacă $a_2=a_3=0$, $a_4\ne 0$, adunând primele cinci relaţii conduce la $a_4(k^5-4k^3+3k)\le 0$, adică $k(k^2-1)(k^2-3)\le 0$. Dacă avem $k\ge\sqrt{3}\approx 1,74$, ajungem la contradicţie.

Dacă $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $a_5 \neq 0$, adunând primele patru relaţii ajungem la $a_5(k^4 - 3k^2 + 1) \leq 0$. Dar $k \geq \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} \approx 1,62$ duce la contradicţie.
Dacă $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$, $a_6 \neq 0$, adunăm primele trei relaţii şi obţinem $a_6(k^3 - 2k) \leq 0$. În cazul $k \geq \sqrt{2}$ ajungem la o contradicţie.
În fine, dacă $a_2 = a_3 = \ldots = a_6$, atunci $a_7 \neq 0$ şi din primele două relaţii obţinem $a_7(k^2 - 1) \leq 0$, ceea ce este fals dacă $k \geq 1$.
Din cele de mai sus se vede că proprietatea (P) este adevărată pentru orice $k > \sqrt{2+\sqrt{2}}$, în particular pentru $k = \dfrac{19}{10}$.

Problema 7. Noe are pe corabia sa 4 cuşti mari în care trebuie să aşeze 8 animale. Se ştie că pentru orice animal există cel mult 5 animale cu care el este incompatibil (nu pot locui împreună). Arătaţi că:
a) Noe poate aşeza animalele în cuşti în conformitate cu compatibilitatea lor.
b) Noe poate aşeza animalele câte două în fiecare cuşcă.
Soluţie:
a) Punem animalele succesiv în cuşti. Fiecare animal are cel mult trei cuşti în care nu poate fi pus, aşa încât pentru fiecare animal există, atunci când îi vine rândul să fie plasat, câte o cuşca disponibilă.
b) Aranjăm animalele în cuşti ca la a). Dacă rămâne o cuşcă goală, există o cuşcă cu cel puţin 3 animale dintre care vom muta două în cuşca goală (în cuştile goale). Dacă avem două cuşti ocupate de câte un singur animal, dacă acestea sunt compatibile le mutăm împreună şi mutăm două animale în cuşca goală. Astfel putem ajunge la una din următoarele repartiţii pe cuşti: 5-1-1-1, 4-2-1-1, 3-3-1-1, 3-2-2-1 şi 2-2-2-2 (pe care îl vrem). În cazul 5-1-1-1 (cu oricare din cele trei animale care stau singure - incompatibile), fiecare din animalele singuratice mai are câte un singur neprieten, deci i se poate găsi un prieten în cuşca de 5. În cazul 4-2-1-1 (cele două animale singure sunt incompatibile), îi putem alege pe rând fiecărui animal din cuşca de 1 câte un animal compatibil cu el din cuşca de 4. La fel în cazul 3-3-1-1 (alegem fiecărui animal singuratic câte un prieten din câte una din cuştile de 3; obligatoriu va avea un prieten acolo). În fine, în cazul 3-2-2-1, animalul din cuşca de 1 are cel mult 3 animale incompatibile cu ea. Dacă nu sunt exact cele 3 din cuşca cu 3, mutăm un prieten de acolo. Dacă el e incompatibil cu fiecare animal de acolo, atunci el e compatibl cu orice alt animal şi vom face rocadă între el şi un animal dintr-o cuşcă de 2 care e compatibil măcar cu un animal din cuşca de 3. Astfel, în fiecare situaţie, putem rearanja animalele în cuşti astfel încât în fiecare cuşcă să fie exact două animale.

Problema 8. Fie numerele naturale a, b, c, astfel încât $c > b > a > 0$. Arătaţi că, printre oricare $2c$ numere naturale consecutive, există trei numere distincte x, y, z astfel încât abc divide xyz.

Soluţie:
Printre oricare $2c$ numere consecutive există cel puţin două divizibile cu c, cel puţin trei divizibile cu b şi cel puţin trei divizibile cu a. Alegem x unul din numerele divizibile cu c, apoi $y \neq x$ unul dintre numerele divizibile cu b (există măcar două diferite de x) şi, în fine, $z \notin \{x, y\}$ unul dintre numerele divizibile cu a (fiind minim trei asemenea numere, sigur există şi unul diferit de x şi de y). Concluzia este evidentă.