BARAJUL 1 PENTRU JUNIORI, 2000

Problema 1. Arătaţi că expresia $(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(-a+b+1)$, unde $a=\sqrt{1+x^2}$, $b=\sqrt{1+y^2}$ şi $x+y=1$ este o mărime constantă şi să se calculeze această mărime.

Problema 2. Numărul 665 este reprezentat ca o sumă de 18 numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a celui mai mic multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$.

Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $AB=AC$ şi $m(\sphericalangle BAC)=100°$. Fie $[AD]$ şi $[BE]$ bisectoarele triunghiului ABC duse din A, respectiv B. Arătaţi că $2AD<BE+EA$.

Problema 4. Găsiţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât există n numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică simultan condiţiile:

1) $x_i \in \left[\frac{1}{2},\ 2\right]$, $i=1,2,\ldots,n$;

2) $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq \frac{7n}{6}$;

3) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n} \geq \frac{4n}{3}$.

BARAJUL 2 PENTRU JUNIORI, 2000

Problema 5. Fie numerele reale a,b,c astfel încât $a\geq b\geq c>0$. Arătaţi că $\frac{a^2-b^2}{c}+\frac{c^2-b^2}{a}+\frac{a^2-c^2}{b}\geq 3a-4b+c$. Când are loc egalitatea?

Problema 6. Arătaţi că printre oricare 39 de numere naturale consecutive, există un număr a cărui sumă a cifrelor se divide cu 11. (Gheorghe Eckstein, Baraj seniori, România, 1999)

Problema 7. Fie un triunghi ABC, A_1 mijlocul segmentului $[BC]$, $B_1 \in (AC)$ şi $C_1 \in (AB)$ astfel încât $[A_1B_1$ este bisectoarea unghiului AA_1C şi A_1C_1 este perpendiculară pe AB. Arătaţi că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle BAC)=90°$.

Problema 8. Arătaţi că numerele 18^n şi 2^n+18^n au acelaşi număr de cifre (în scrierea în baza 10), oricare ar fi numărul natural n. (Kvant)

Problema 1. Arătaţi că expresia $(a+b+1)(a+b-1)(a-b+1)(-a+b+1)$, unde $a=\sqrt{1+x^2}$, $b=\sqrt{1+y^2}$ şi $x+y=1$ este o mărime constantă şi să se calculeze această mărime.

Soluţie:

Expresia este egală cu $2a^2b^2+2a^2+2b^2-a^4-b^4-1=2(1+x^2)(1+y^2)+2(1+x^2)+2(1+y^2)-(1+x^2)^2-(1+y^2)^2-1=2x^2y^2-x^4-y^4+2x^2+2y^2+3=-(x-y)^2(x+y)^2+2(x^2+y^2)+3=-(x-y)^2+2(x^2+y^2)+3=(x+y)^2+3=4$.

Remarcă: Expresia reprezintă numărul $16S^2$, unde S este aria unui triunghi cu laturile de lungimi $a, b, 1$ (calculată cu formula lui Heron). Dacă $x, y \geq 0$, am fi putut calcula uşor această expresie: dacă $D \in [BC]$ este astfel ca $BD = x$, $DC = y$ şi $AD \perp BC$, $AD = 1$, atunci $AB = a$, $AC = b$, $BC = 1$, iar aria triunghiului este $\frac{1}{2}$. Atunci $16S^2 = 4$. Din păcate însă această soluţie nu merge în cazul $xy < 0$.

Problema 2. Numărul 665 este reprezentat ca o sumă de 18 numere naturale nenule $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a celui mai mic multiplu comun al numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$.

Soluţie:

Numărul căutat este 38. Putem alege 17 numere egale cu 38 şi unul egal cu 19. Cel mai mic multiplu comun este 38.

Media numerelor este mai mare ca 36 (căci $665/18 > 36$), deci măcar unul dintre numere este mai mare ca 36, deci şi cel mai mic multiplu comun trebuie să fie cel puţin 37. Dacă însă ar fi 37, numerele ar fi, toate, divizori ai lui 37. Dar 37 este prim, deci ar trebui ca $x \cdot 1 + (18-x) \cdot 37 = 665$ care nu are soluţie întreagă.

Problema 3. Fie triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 100°$. Fie $[AD]$ şi $[BE]$ bisectoarele triunghiului ABC duse din A, respectiv B. Arătaţi că $2AD < BE + EA$.

Soluţie:

Paralela prin B la AD intersectează AC în F. Atunci $AF = AC = AB$, $BF = 2AD$, $EF = AB + AE$. Cum $m(\sphericalangle BEF) = 60°$, $m(\sphericalangle BFE) = 50°$, deci rezultă $m(\sphericalangle EBF) = 70° > m(\sphericalangle BEF)$, prin urmare în triunghiul BEF la latura mai mare se opune unghiul mai mare şi reciproc, deci $2AD = BF < EF = AE + AB < AE + BE$ (în triunghiul ABE avem $m(\sphericalangle BAE) = 100° > 60° = m(\sphericalangle AEB)$, deci $BE > AB$).

Problema 4. Găsiţi cel mai mic număr natural nenul n astfel încât există n numere reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ care verifică simultan condiţiile:

1) $x_i \in \left[\frac{1}{2},\ 2\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \dfrac{7n}{6}$;

3) $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} \geq \dfrac{4n}{3}$.

Soluţie:

Vom arţa că $x + \dfrac{1}{x} \leq 2 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}\,,\ 2\right]$, cu egalitate dacă $x_i \in \left\{\dfrac{1}{2}\,,\ 2\right\}$.
Într-adevăr, relaţia dată este echivalentă cu $(x-2)\left(x - \dfrac{1}{2}\right) \leq 0$.
Adunând ultimele două relaţii obţinem că $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right) \geq \frac{7n}{6} + \frac{4n}{3} = \frac{5n}{2}$. Pe de altă parte, din inegalitatea demonstrată în primul rând, avem $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(x_i + \frac{1}{x_i}\right) \leq \frac{5n}{2}$.
Aşadar trebuie să avem egalitate, lucru care se întâmplă numai dacă avem egalitate în toate inegalităţile, adică dacă $x_i \in \left\{\dfrac{1}{2}\,,\ 2\right\}$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{7n}{6}$ şi $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{4n}{3}$. Dacă avem k dintre numerele x_i egale cu 2 şi celelalte $n-k$ egale cu $\dfrac{1}{2}$, trebuie să fie îndeplinite simultan condiţiile: $2k + \dfrac{1}{2}\cdot(n-k) = \dfrac{7n}{6}$ şi $\dfrac{1}{2}\cdot k + 2(n-k) = \dfrac{4n}{3}$. Cele două condiţii sunt echivalente şi revin la $9k = 4n$.
Aşadar $9 \mid n$, deci $n \geq 9$. Pentru $n = 9$ (patru numere egale cu 2, celelalte cinci cu $\dfrac{1}{2}$) au loc condiţiile din enunţ.

Problema 5. Fie numerele reale a, b, c astfel încât $a \geq b \geq c > 0$. Arătaţi că $\dfrac{a^2-b^2}{c} + \dfrac{c^2-b^2}{a} + \dfrac{a^2-c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$. Când are loc egalitatea?

Soluţie:

$\dfrac{a^2-b^2}{c} + \dfrac{c^2-b^2}{a} + \dfrac{a^2-c^2}{b} \geq 2(a-b) + 2(c-b) + (a-c) = 3a - 4b + c$ cu egalitate dacă $a = b = c$.

Problema 6. Arătaţi că printre oricare 39 de numere naturale consecutive, există un număr a cărui sumă a cifrelor se divide cu 11. (Gheorghe Eckstein, Baraj 1 seniori, România, 1999)

Soluţie:

Dacă $\overline{a_1a_2\ldots a_n0}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_n1}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_n2}$, $\ldots$, $\overline{a_1a_2\ldots a_n9}$ sunt 10 dintre numere şi niciunul nu are suma cifrelor divizibilă cu 11, atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv 1 \pmod{11}$. Dacă $a_n \neq 9$, atunci urmează numerele $\overline{a_1a_2\ldots a_n'0}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_n'1}$, $\ldots$,

$\overline{a_1a_2\ldots a_n'9}$, unde $a_n' = a_n + 1$ şi ultimul număr are suma cifrelor divizibilă cu 11. Rămâne că $a_n = 9$. Dacă ultimele $k \geq 1$ dintre cifrele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt 9, atunci $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-k} + 9k \equiv 1 \pmod{11}$. În acest caz, după grupul de 10 numere menţionat mai sus, urmează $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}'0\ldots00}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}'0\ldots01}$, ..., $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}'0\ldots09}$. Dacă nici printre aceste 10 numere nu se află niciunul cu suma cifrelor divizibilă cu 11 (se poate, dacă $a_1+a_2+\ldots+a_{n-k}+1 \equiv 1 \pmod{11}$), însă în următorul grup de zece numere, $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}'0\ldots010}$, $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}'0\ldots011}$, ..., $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-k}'0\ldots019}$, ultimul număr are suma cifrelor divizibilă cu 11. Ori printre 39 de numere consecutive avem trei grupuri de câte 10 care au proprietatea că în fiecare grup, numerele diferă numai prin ultima cifră.
Remarcă: Problema 1 de la barajul 1 (Alba Iulia 1999) avea şi o a doua cerinţă: să se determine cele mai mici 38 de numere naturale consecutive care au proprietatea că suma cifrelor nu este divizibilă cu 11.

Problema 7. Fie un triunghi ABC, A_1 mijlocul segmentului $[BC]$, $B_1 \in (AC)$ şi $C_1 \in (AB)$ astfel încât $[A_1B_1$ este bisectoarea unghiului AA_1C şi A_1C_1 este perpendiculară pe AB. Arătaţi că dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente dacă şi numai dacă $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.
Soluţie:
Dacă dreptele AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente, din teorema lui Ceva rezultă $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AC_1}{C_1B}$, dar din teorema bisectoarei, $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{AA_1}{A_1C} = \dfrac{AA_1}{A_1B}$. Aşadar $\dfrac{AC_1}{C_1B} = \dfrac{AA_1}{A_1B}$ deci, din reciproca teoremei bisectoarei, $[A_1C_1]$ este bisectoare şi înălţime în triunghiul ABA_1. Rezultă că $A_1B = A_1A = A_1C$, deci triunghiul este dreptunghic.
Reciproc, dacă triunghiul este dreptunghic, atunci $AA_1 = A_1C$, deci $[A_1B_1]$ este şi mediană deci AA_1, BB_1 şi CC_1 sunt concurente fiind medianele triunghiului ABC.

Problema 8. Arătaţi că numerele 18^n şi $2^n + 18^n$ au acelaşi număr de cifre (în scrierea în baza 10), oricare ar fi numărul natural n. (Kvant)
Soluţie:
Presupunem că numărul 18^n are k cifre, iar $18^n + 2^n$ are mai multe cifre. Atunci $18^n < 10^k \leq 18^n + 2^n$ şi, evident, $k > n$. Obţinem $9^n < 2^{k-n} \cdot 5^k \leq 9^n + 1$, de unde rezultă că $2^{k-n} \cdot 5^k = 9^n + 1$.
Dacă $k - n \geq 2$, membrul stâng este divizibil cu 4, în timp ce membrul drept nu, deci nu putem avea egalitate. Rezultă $k - n = 1$, adică $2 \cdot 5^{n+1} = 9^n + 1$.
Dacă $n \geq 4$, atunci $\dfrac{9^n+1}{5^n} > \left(\dfrac{9}{5}\right)^n \geq \left(\dfrac{9}{5}\right)^4 = \dfrac{6561}{625} > 10$, deci $9^n + 1 > 2 \cdot 5^{n+1}$.
Se verifică imediat că egalitatea $2 \cdot 5^{n+1} = 9^n + 1$ nu are loc nici pentru $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Prin urmare, presupunerea de la care am plecat este falsă; 18^n şi $18^n + 2^n$ au acelaşi

număr de cifre.