BARAJUL PENTRU JUNIORI, 1999

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\frac{xyz}{x+y+1} = 1998000, \quad \frac{xyz}{y+z-1} = 1998000, \quad \frac{xyz}{z+x} = 1998000.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel cu unghiul drept în A. Punctul D este mijlocul laturii $[AC]$, iar punctul $E \in [AC]$ este astfel încât $EC = 2AE$. Calculaţi $m(\sphericalangle AEB) + m(\sphericalangle ADB)$.

Problema 3. Pe tablă este scris un număr de nouă cifre nenule şi distincte. Să se arate că putem şterge cel mult şapte cifre astfel încât numărul format din cifrele rămase să fie un pătrat perfect (de exemplu, din numărul 214567893 se pot obţine pătratele 16, 25, 49, 169, ş.a.m.d.).

Problema 4. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $1998\,\mathrm{cm}^2$. Punctele K, L şi M împart segmentele $[AB]$, $[BC]$ şi $[CA]$, respectiv, în raportul $\frac{3}{4}$. Dreapta AL intersectează dreptele CK şi BM respectiv în punctele P şi Q, iar dreapta BM intersectează dreapta CK în punctul R. Aflaţi aria triunghiului PQR.

Problema 5. Fie mulţimea $M = \left\{\frac{1998}{1999}, \frac{1999}{2000}\right\}$. Mulţimea M se completează cu fracţii noi după regula: se iau două fracţii distincte $\frac{p_1}{q_1}$ şi $\frac{p_2}{q_2}$ din M astfel încât nu există alte numere din M situate între ele şi se formează o fracţie nouă, $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$, care se include în M, etc. Arătaţi că, după fiecare procedeu, fracţia nou obţinută este ireductibilă şi este diferită de fracţiile incluse anterior în M.

Problema 1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ sistemul:

$$\frac{xyz}{x+y+1} = 1998000, \quad \frac{xyz}{y+z-1} = 1998000, \quad \frac{xyz}{z+x} = 1998000.$$

Soluţie:
Avem $x+y+1 = y+z-1 = z+x$, deci $y = x+1$, $z = y+1 = x+2$. Revenind la ecuaţiile din enunţ, găsim $x(x+2) = 2 \cdot 1998000 = 1998 \cdot 2000$. Această ecuaţie de gradul II are soluţiile $x = -2000$ şi $x = 1998$. De aici se obţin cele două soluţii ale sistemului: $(x,y,z) = (-2000,-1999,-1998)$ şi $(x,y,z) = (1998,1999,2000)$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel cu unghiul drept în A. Punctul D este mijlocul laturii $[AC]$, iar punctul $E \in [AC]$ este astfel încât $EC = 2AE$. Calculaţi $m(\sphericalangle AEB) + m(\sphericalangle ADB)$.
Soluţia 1:
Fie F, H proiecţiile punctelor D, respectiv A, pe BC. Atunci $DE = CF$ şi $\dfrac{BF}{FD} = \dfrac{BF}{FC} = 3 = \dfrac{AB}{AE}$. Triunghiurile FBD şi ABE sunt asemenea şi $\sphericalangle FBD \equiv \sphericalangle ABE$. Cum $m(\sphericalangle AEB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABE)$ şi $m(\varepsilon ADB) = 45^\circ + m(\sphericalangle FBD)$, dci $m(\sphericalangle AEB) + m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ - m(\sphericalangle ABE) + 45^\circ + m(\sphericalangle FBD) = 135^\circ$.
Soluţia 2:
Fie într-un reper cartezian xOy punctele $X(-2,1)$, $Y(3,1)$, $Z(2,1)$, $M(0,1)$. Evident, X şi Z sunt simetrice faţă de O. Apoi $\operatorname{tg}(\widehat{AEB}) = 3 = \operatorname{tg}(\widehat{YOM})$ şi $\operatorname{tg}(\widehat{ADB}) = 2 = \operatorname{tg}(\widehat{XOM})$, deci $m(\widehat{AEB})+m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{YOM})+m(\widehat{XOM}) = (\widehat{XOY}) = 180^\circ - m(\widehat{YOZ})$. Dar triunghiul YOZ este dreptunghic isoscel, deci $m(\widehat{YOZ}) = 45^\circ$, de unde concluzia.

Problema 3. Pe tablă este scris un număr de nouă cifre nenule şi distincte. Să se arate că putem şterge cel mult şapte cifre astfel încât numărul format din cifrele rămase să fie un pătrat perfect (de exemplu, din numărul 214567893 se pot obţine pătratele 16, 25, 49, 169, ş.a.m.d.).
Soluţie:
Dacă în scrierea numărului 1 stă înaintea lui 6, putem rămâne cu 16. Dacă 6 stă înaintea lui 4, putem rămâne cu 64. Dacă 4 stă înaintea lui 9, putem rămâne cu 49. Dacă nu suntem în niciunul din cazurile anterioare, cifrele menţionate trebuie să ste în ordinea 9, 4, 6, 1, dar atunci putem şterge şase cifre şi rămâne cu $961 = 31^2$.

Problema 4. Fie ABC un triunghi echilateral de arie $1998\,\mathrm{cm}^2$. Punctele K, L şi M împart segmentele $[AB]$, $[BC]$ şi $[CA]$, respectiv, în raportul $\dfrac{3}{4}$. Dreapta AL intersectează dreptele CK şi BM respectiv în punctele P şi Q, iar dreapta BM intersectează dreapta CK în punctul R. Aflaţi aria triunghiului PQR.

Soluţie:
Fie X mijlocul lui $[BC]$, Y nijlocul lui $[BX]$ şi Z mijlocul lui $[PR]$. Atunci $BY = YX = XL = LC$; avem $LP \parallel ZX \parallel RY$. Dacă $\sigma[PLC] = s$, din asemănare avem $\sigma[YRC] = 27s$, apoi $\sigma[BRY] = 9s$, deci $\sigma[BRC] = 36s$. Rezultă că $\sigma[BCK] = 37s = \dfrac{1}{3}\sigma[ABC]$, de unde $s = 18$ (cm^2).
Cum $\sigma[PQR] = \sigma[ABC] - 3\sigma[BCR] = 1998 - 3 \cdot 36 \cdot 18 = 54\,(\text{cm}^2)$.

Problema 5. Fie mulţimea $M = \left\{\dfrac{1998}{1999}, \dfrac{1999}{2000}\right\}$. Mulţimea M se completează cu fracţii noi după regula: se iau două fracţii distincte $\dfrac{p_1}{q_1}$ şi $\dfrac{p_2}{q_2}$ din M astfel încât nu există alte numere din M situate între ele şi se formează o fracţie nouă, $\dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$, care se include în M, etc. Arătaţi că, după fiecare procedeu, fracţia nou obţinută este ireductibilă şi este diferită de fracţiile incluse anterior în M.
Soluţie:
Se verifică uşor prin calcul că dacă $0 < \dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_2}{q_2} < 1$, atunci $\dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}\dfrac{p_2}{q_2}$, deci toate fracţiile care se obţin sunt pozitive, subunitare şi noi. Să arătăm că sunt şi ireductibile. Dacă o fracţie $\dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ s-ar simplifica cu d, atunci am avea că $d \mid p_1+p_2$ şi $d \mid q_1+q_2$, deci $d \mid q_1(p_1+p_2) - p_1(q_1+q_2)$, adică $d \mid q_1p_2 - p_1q_2$. Iniţial, această expresie este 1 şi ea rămâne 1 de-a lungul procesului de intercalare a fracţiilor, deci orice fracţie nouă creeată este ireductibilă şi dacă $0 < \dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_2}{q_2} < 1$ verifică $q_1p_2 - p_1q_2 = 1$, atunci avem $\dfrac{p_1}{q_1} < \dfrac{p_1+p_2}{q_1+q_2}\dfrac{p_2}{q_2}$ şi, dacă notăm $p_3 = p_1 + p_2$, $q_3 = q_1 + q_2$, atunci avem şi $q_1p_3 - q_3p_1 = 1$ şi $q_3p_2 - q_2p_3 = 1$.